Tentamen Vectoranalyse
16 april 2004

Zet op elk vel je naam en student nummer. De nummers tussen de haakjes geven het aantal punten aan voor die opgave.

$$\text{Cijfer} = 1 + \frac{\#}{5}$$

I) (7) Laat $D = \{(x,y) | \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x), x \in [a,b]\}$ waarbij $\phi_1, \phi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ en

- $\phi_1(x) < \phi_2(x)$ voor alle $x \in (a,b)$,
- $\phi_1(a) = \phi_2(a)$,
- $\phi_1(b) = \phi_2(b)$.

Bewijs

$$\int_{\partial D} P dx = \int \int_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy.$$

II) Laat $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven zijn door

$$f(x,y) = \pi x^2 - \pi x - y,$$

$$g(x,y) = y + \sin(\pi x).$$

a) (5) Bepaal alle kandidaten voor extremen van f onder de conditie $g = 0$. Hint: schets de grafieken van $y = 1 - 2x$ en $y = \cos(\pi x)$.

b) (5) Gebruik de Hessianen van f en g om het type van deze kandidaten te bepalen.

III) Laat $D = \{(x,z) | x^2 + z^2 \leq 1\}$ en $\phi : D \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$\phi(x,z) = 10 + x^2 \sin^3(z).$$

Verder beschouw de oppervlakken

$$B = \{(x,y,z) | x^2 + z^2 = 1 \text{ en } 0 \leq y \leq \phi(x,z)\},$$

en

$$S = \{(x,y,z) | x^2 + z^2 \leq 1 \text{ en } y = \phi(x,z)\}.$$

De rand van B bestaat uit twee lussen, ∂D en ∂S. Het vectorveld F is gegeven door

$$F(x,y,z) = (-z, 0, x).$$

a) (3) Laat zien dat als $(x,y,z) \in B$ dan geldt dat $\text{curl}(F)(x,y,z)$ ligt in het raakvlak van B in (x,y,z).

Z.O.Z.

b) (6) bewijs dat

$$\int_{\partial S} F \cdot ds = \int_{\partial D} F \cdot ds$$

c) (3) Bereken

$$\int_{\partial S} F \cdot ds.$$

IV) Gegeven is het vectorveld $F(x, y, z) = (y^4, 4xy^3, 2z)$

a) (2) Bepaal curl(F).

b) (5) Bestaat er een functie f zodanig dat F de gradient is van f? Verklaar.

c) (5) Laat $c : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ met

$$c(t) = (\sin(2\pi t), \cos^2(2\pi t), \sin(2\pi t) \cdot \cos(2\pi t)).$$

Bepaal

$$\int_c F \cdot ds.$$

V)(4) Het oppervlak S is geparametriseerd door $\Phi : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}^3$

$$x = u \cdot v$$
$$y = u + v^3$$
$$z = v$$

Bepaal het raakvlak aan S in $\Phi(0,0)$.

b) (6) bewijs dat

$$\int_{\partial S} F \cdot ds = \int_{\partial D} F \cdot ds$$

c) (3) Bereken

$$\int_{\partial S} F \cdot ds.$$

IV) Gegeven is het vectorveld $F(x, y, z) = (y^4, 4xy^3, 2z)$

a) (2) Bepaal curl(F).

b) (5) Bestaat er een functie f zodanig dat F de gradient is van f? Verklaar.

c) (5) Laat $c : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ met

$$c(t) = (\sin(2\pi t), \cos^2(2\pi t), \sin(2\pi t) \cdot \cos(2\pi t)).$$

Bepaal

$$\int_c F \cdot ds.$$

V)(4) Het oppervlak S is geparametriseerd door $\Phi : [-1, 1]^2 \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} x &= u \cdot v \\ y &= u + v^3 \\ z &= v \end{aligned}$$

Bepaal het raakvlak aan S in $\Phi(0, 0)$.